Exercícios Probabilidade

Insper

2024

Recap – Teoria dos Conjuntos

1. Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos $A =$ "faces iguais"; $B =$ "cara na primeira moeda"; $C =$ "coroa na segunda e terceira moedas".

- Faça o diagrama de Venn para esse experimento.

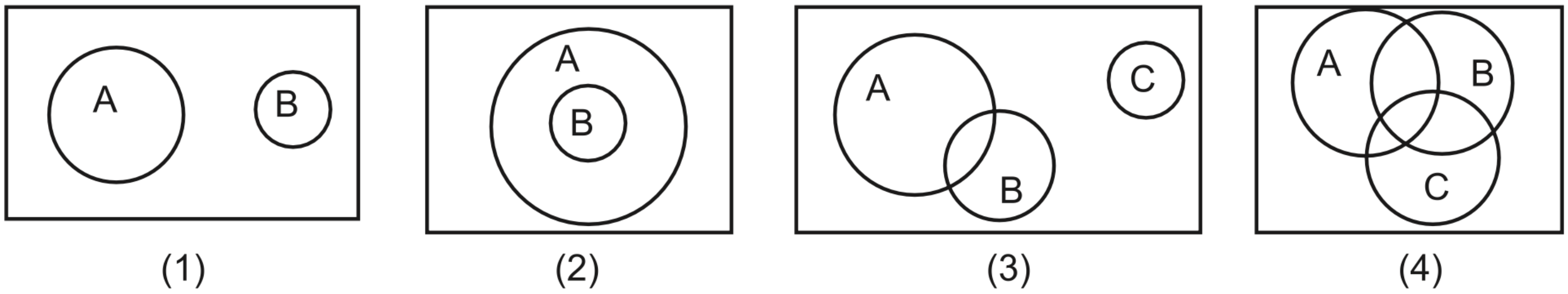
Recap – Teoria dos Conjuntos

(a) No diagrama (1), assinale a área correspondente a $A - B$

(b) No diagrama (2), assinale a área correspondente a $\overline{A} \cap \overline{B}$

(c) No diagrama (3), assinale a área correspondente a $(A \cup C) \cap B$

(d) No diagrama (4), assinale a área correspondente a $(A \cup B) \cap C$



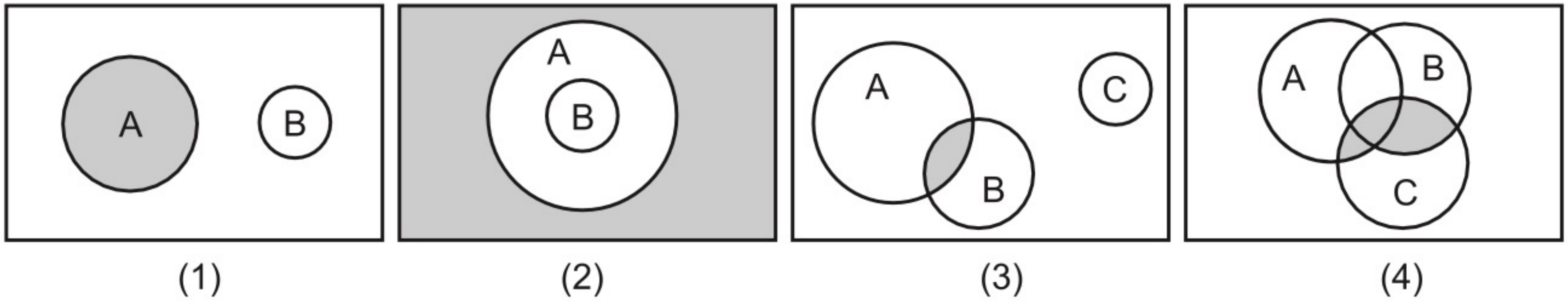
Recap – Teoria dos Conjuntos

(a) No diagrama (1), assinale a área correspondente a $A - B$

(b) No diagrama (2), assinale a área correspondente a $\overline{A} \cap \overline{B}$

(c) No diagrama (3), assinale a área correspondente a $(A \cup C) \cap B$

(d) No diagrama (4), assinale a área correspondente a $(A \cup B) \cap C$



Pontos importantes - Probabilidade

Definição clássica de probabilidade

Seja A um evento de um espaço amostral Ω finito, cujos elementos são igualmente prováveis. Define-se a probabilidade do evento A como

$$\Pr(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{7.1}$$

Propriedades da probabilidade

$$0 \leq \Pr(A) \leq 1$$

$$\Pr(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

Lei de De Morgan

not (A and B) → not A or not B

penjee.com

not (A or B) → not A and not B

Exercício #1

1. Dados $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $\Pr(A) = \frac{1}{3}$, $\Pr(B) = \frac{1}{3}$, calcule:

   (a) $\Pr(C)$

   (b) $\Pr(A \cup B)$

   (c) $\Pr(\overline{A})$

   (d) $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$

   (e) $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Exercício #1 - Resolução

1. Dados $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $\Pr(A) = \frac{1}{3}$, $\Pr(B) = \frac{1}{3}$, calcule:

   (a) $\Pr(C)$

   (b) $\Pr(A \cup B)$

   (c) $\Pr(\overline{A})$

   (d) $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$

   (e) $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B})$.

(a) Como $\Pr(\Omega) = 1$, resulta que $\Pr(C) = 1 - \Pr(A) - \Pr(B) = \frac{1}{3}$.

(b) Como A e B são mutuamente exclusivos, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{2}{3}$.

(c) $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A) = \frac{2}{3}$.

(d) Pela lei de De Morgan, temos que $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

(e) Pela lei de De Morgan, temos que $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cap B}) = 1 - \Pr(A \cap B) = 1 - 0 = 1$.

Exercício #2

Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, cada naipe com 13 cartas. As cartas dos 2 primeiros naipes são *vermelhas* e as dos dois últimos naipes, *pretas*. Em cada naipe, as cartas podem ser Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei. Estas três últimas são *figuras* que representam a realeza. Retirando-se ao acaso uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de que seja uma figura? Uma carta preta?

Exercício #2 - Resolução

Como há 52 cartas ao todo, $\#\Omega = 52$. Vamos denotar por F o evento "carta retirada é uma figura" e por P o evento "carta retirada é preta". Em cada um dos 4 naipes há três figuras. Logo, o número total de figuras é 4×3, ou seja, $\#F = 12$. Logo, a probabilidade de retirarmos uma figura é $\Pr(F) = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$. Metade das cartas é de cor preta; logo, a probabilidade de que a carta seja preta é $\Pr(P) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$.

Exercício #3

Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 8 bolas verde
Uma bola é escolhida ao acaso desta urna. Qual é a probabilidade d
que (i) a bola não seja verde? (ii) a bola seja branca? (iii) a bola nã
seja nem branca nem verde?

Exercício #3 - Resolução

Solução:

Temos um total de $6+2+8 = 16$ bolas. Logo, $\#\Omega = 16$. Vamos denotar por P, B, V os eventos bola preta, branca e verde, respectivamente.

(i) Queremos a probabilidade de $\overline{V}$, ou seja, do complementar de V. Vimos que $\Pr(\overline{V}) = 1 - \Pr(V) = 1 - \frac{8}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

(ii) $\Pr(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

(iii) Se a bola não é branca nem verde, ela tem que ser preta. Note que estamos pedindo $\Pr(\overline{B} \cap \overline{V})$. Pela lei de De Morgan e pelas Propriedades 3 e 4, temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{B} \cap \overline{V}) &= \Pr(\overline{B \cup V}) = 1 - \Pr(B \cup V) \\
&= 1 - [\Pr(B) + \Pr(V)] = 1 - \frac{2}{16} - \frac{8}{16} = \frac{6}{16} \\
&= \frac{3}{8} = \Pr(P)
\end{aligned}$$

Exercício #4

. Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um. Sorteando-se ao acaso um desses alunos, qual é a probabilidade de que

(a) não tenha acertado qualquer um dos dois problema?

(b) tenha acertado apenas o segundo problema?

Exercício #4 - Resolução

Vamos denotar por P_1 e P_2 os eventos "acertar problema 1" e "acertar problema 2" respectivamente. Os dados do problema nos dão que:

$$\begin{aligned}
\#(P_1 \cap P_2) &= 120 && \text{(acertar os 2)} \\
\#P_1 &= 132 && \text{(acertar o primeiro)} \\
\#\overline{P_2} &= 86 && \text{(errar o segundo)} \\
\#\left[(P_1 \cap \overline{P_2}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2)\right] &= 54 && \text{(acertar apenas um)}
\end{aligned}$$

O número de alunos que acertaram apenas a primeira é

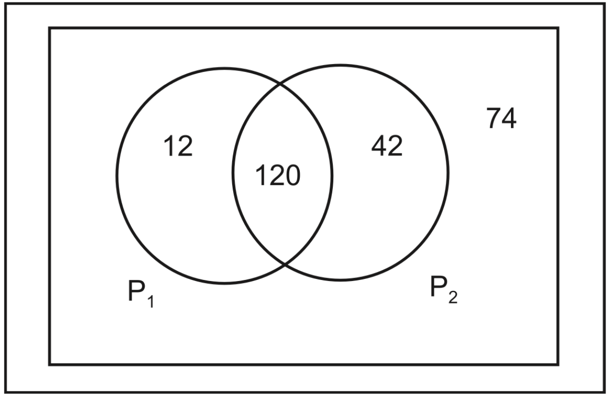
$$\#\left(P_1 \cap \overline{P}_2\right) = \#P_1 - \#(P_1 \cap P_2) = 132 - 120 = 12$$

Logo, o número de candidatos que acertaram apenas a segunda é

$$\#(\overline{P}_1 \cap P_2) = 54 - 12 = 42$$

Daí segue que o número de alunos que acertaram a segunda questão é

$$\#P_2 = \#(\overline{P}_1 \cap P_2) + \#(P_1 \cap P_2) = 42 + 120 = 162$$



Logo, o número total de alunos é

$$\#\Omega = \#(P_2 \cup \overline{P_2}) = \#P_2 + \#\overline{P_2} = 162 + 86 = 248$$

(a) Pela lei de De Morgan, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2\right) &= \Pr\left(\overline{P_1 \cup P_2}\right) = 1 - \Pr\left(P_1 \cup P_2\right) = \\
&= 1 - \left[\Pr(P_1) + \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2)\right] = \\
&= 1 - \frac{132}{248} - \frac{162}{248} + \frac{120}{248} \\
&= \frac{74}{248} = \frac{37}{124}
\end{aligned}$$

(b) Pela Propriedade 6, tem-se que:

$$\Pr\left(P_2 \cap \overline{P}_1\right) = \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2) = \frac{162 - 120}{248} = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$$

Exercício #5

Em uma cidade há três clubes A, B, C. Em um grupo de 1000 famílias constatou-se que 470 são sócias do clube A; 420 são sócias do clube B, 315 são sócias do clube C; 110 são sócias dos clubes A e B; 220 são sócias dos clubes A e C; 140 são sócias dos clubes B e C e 75 são sócias dos 3 clubes. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual é a probabilidade de que ela

(a) não seja sócia de qualquer um dos clubes?

(b) seja sócia de apenas um clube?

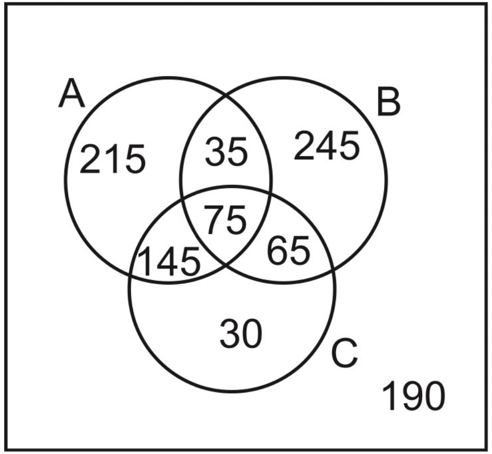
(c) seja sócia de pelo menos dois clubes?

Exercício #5 - Resolução

$\#A = 470 \qquad \#B = 420 \qquad \#C = 315$

$\#\left(A \cap B\right) = 110 \qquad \#\left(A \cap C\right) = 220 \qquad \#\left(B \cap C\right) = 140$

$\#\left(A \cap B \cap C\right) = 75 \qquad \#\Omega = 1.000$



Exercício #5 - Resolução

$$\#A = 470 \qquad \#B = 420 \qquad \#C = 315$$

$$\#(A \cap B) = 110 \qquad \#(A \cap C) = 220 \qquad \#(B \cap C) = 140$$

$$\#(A \cap B \cap C) = 75 \qquad \#\Omega = 1.000$$

(a) não seja sócia de qualquer um dos clubes?

Note que o evento $A \cup B \cup C$ corresponde ao evento "família sorteada é sócia de pelo menos um clube". O problema pede "não é sócia de qualquer clube", ou seja, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Pelas leis de De Morgan e do evento complementar, temos que

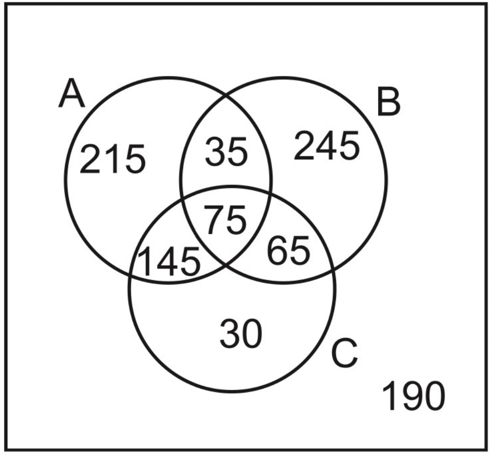
$$\Pr\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = \Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - \Pr(A \cup B \cup C)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) \\ &\quad - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

e, para o problema,

$$\begin{aligned} \Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) &= 1 - \Pr(A \cup B \cup C) = \\ &= 1 - 0,47 - 0,42 - 0,315 + 0,11 + 0,22 + 0,140 - 0,075 \\ &= 0,19 \end{aligned}$$



Exercício #5 - Resolução

$$\#A = 470 \qquad \#B = 420 \qquad \#C = 315$$

$$\#(A \cap B) = 110 \qquad \#(A \cap C) = 220 \qquad \#(B \cap C) = 140$$

$$\#(A \cap B \cap C) = 75 \qquad \#\Omega = 1.000$$

(a) não seja sócia de qualquer um dos clubes?

Note que o evento $A \cup B \cup C$ corresponde ao evento "família sorteada é sócia de pelo menos um clube". O problema pede "não é sócia de qualquer clube", ou seja, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Pelas leis de De Morgan e do evento complementar, temos que

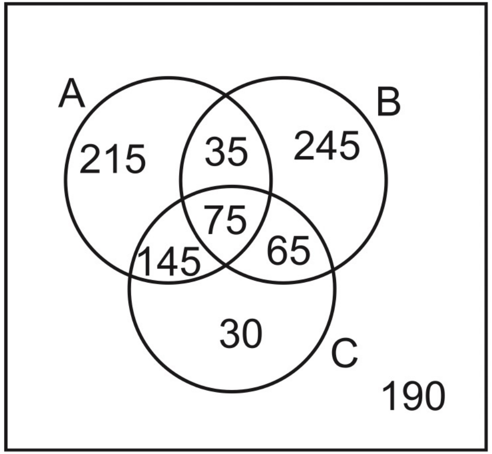
$$\Pr\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = \Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - \Pr(A \cup B \cup C)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B \cup C) \quad &= \quad \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) \\ &\quad - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

e, para o problema,

$$\begin{aligned} \Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) &= 1 - \Pr(A \cup B \cup C) = \\ &= 1 - 0,47 - 0,42 - 0,315 + 0,11 + 0,22 + 0,140 - 0,075 \\ &= 0,19 \end{aligned}$$



Probabilidade Condicional

Definição

A **probabilidade condicional** do evento A dada a ocorrência do evento B é

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Exemplo

Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela abaixo.

Sexo	Atividade de lazer			
	Cinema	Praia	Esporte	Total
Masculino	10	12	13	20
Feminino	15	41	9	80
Total	25	53	22	100

(a) Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?

(b) Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?

Exemplo

Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela abaixo.

Sexo	Atividade de lazer			
	Cinema	Praia	Esporte	Total
Masculino	10	12	13	20
Feminino	15	41	9	80
Total	25	53	22	100

Vamos definir os seguintes eventos: $M =$ "masculino"; $F =$ "feminino"; $C =$ "cinema"; $P =$ "praia"; $E =$ "esporte".

(a) O problema pede $\Pr(M)$. Como há 20 homens dentre as 100 pessoas, temos que

$$\Pr(M) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

(b) O problema pede $\Pr(M|P)$. Por definição,

$$\Pr(M|P) = \frac{\Pr(M \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{53}{100}} = \frac{12}{53}$$

Note que a probabilidade do evento "aluno do sexo masculino" se modifica quando sabemos que a pessoa prefere a praia como atividade de lazer.

(a) Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?

(b) Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?

Exercício #6

A probabilidade de que uma nova campanha publicitária fique pronta antes do prazo estipulado pela diretoria foi estimada em 0,60. A probabilidade de que a diretoria aprove essa campanha publicitária é de 0,50. A probabilidade de que ambos os objetivos sejam atingidos é 0,30.

(a) Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos objetivos seja atingido?

(b) Qual é a probabilidade de que nenhum objetivo seja atingido?

(c) Se a campanha ficou pronta antes do prazo estipulado, qual é a probabilidade de que a diretoria a aprove?

Exercício #6 - Resolução

- A: Evento no qual a campanha fica pronta antes do prazo.
- B: Evento no qual a diretoria aprova a campanha.
- A ∩ B: Evento no qual ambos A e B ocorrem.

As probabilidades fornecidas são:

- P(A) = 0,60
- P(B) = 0,50
- P(A ∩ B) = 0,30

Com base nessas informações, podemos resolver as perguntas da seguinte forma:

(a) A probabilidade de que pelo menos um dos objetivos seja atingido (ou seja, a campanha fica pronta antes do prazo ou a diretoria aprova, ou ambos) é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(b) A probabilidade de que nenhum objetivo seja atingido é o complemento da probabilidade de que pelo menos um seja atingido:

$$P(\text{não A} \cap \text{não B}) = 1 - P(A \cup B)$$

(c) Se a campanha ficou pronta antes do prazo estipulado, a probabilidade condicional de que a diretoria a aprovou é dada por:

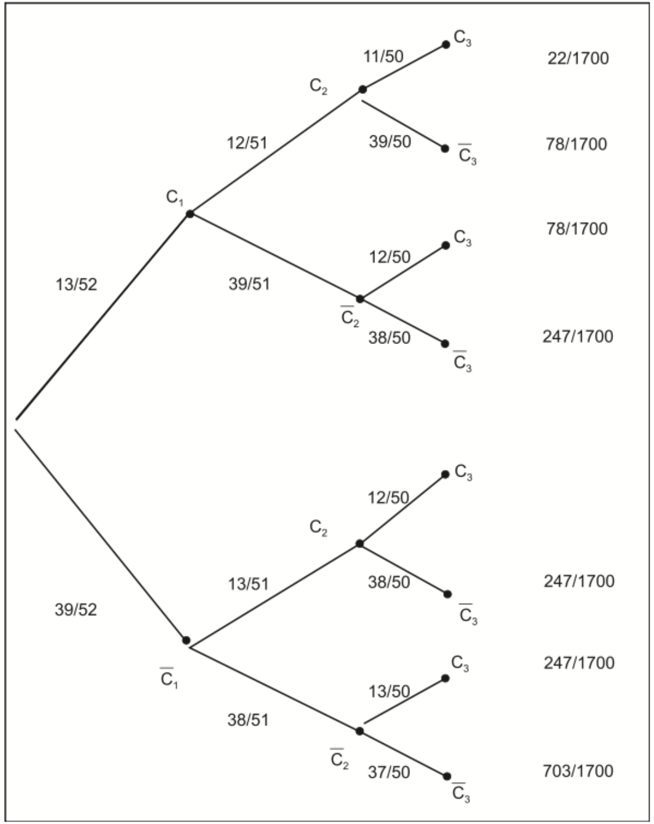
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Regra Geral da Multiplicação

Regra geral da multiplicação

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma seqüência de eventos de um espaço amostral Ω. Então

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\cdots\Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$



Exemplo

Sabe-se que um "soro da verdade", quando aplicado a um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Um suspeito é retirado de um grupo de pessoas, onde 90% jamais cometeram qualquer crime.

1. Qual é a probabilidade de o soro dar a resposta certa?
2. Se o soro indica "culpado", qual é a probabilidade de o suspeito ser inocente?

Resolução

1. Vamos definir os seguintes eventos (veja a **Figura 9.3**):

   C = "suspeito é culpado" $\quad \overline{C}$ = "suspeito é inocente"

   V = "soro indica culpado" $\quad \overline{V}$ = "soro indica inocente"

   Note que você tem que definir os eventos de acordo com a execução do experimento. Ao se aplicar um soro da verdade, a resposta é "culpado" ou "i

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
\Pr(V \mid C) &= 0,90 \\
\Pr(\overline{V} \mid \overline{C}) &= 0,99 \\
\Pr(\overline{C}) &= 0,95
\end{aligned}
$$

Usando o resultado sobre probabilidade do evento complementar, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\Pr(\overline{V} \mid C) &= 0,10 \\
\Pr(V \mid \overline{C}) &= 0,01 \\
\Pr(C) &= 0,05
\end{aligned}
$$

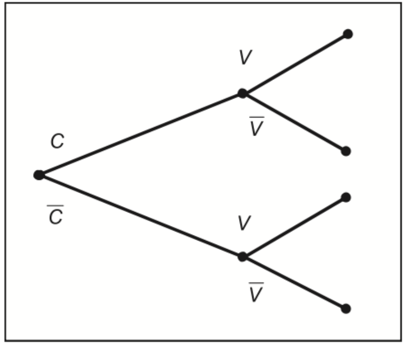
A partição do espaço amostral é definida pelos eventos C e $\overline{C}$, para os quais temos as probabilidades **a priori**. Os eventos de interesse são V e $\overline{V}$.

Seja o evento A = "soro acerta o diagnóstico". Note que o soro pode diagnosticar corretamente sendo o suspeito culpado ou inocente, ou seja:

$$A = (C \cap V) \cup (\overline{C} \cap \overline{V})$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(C \cap V) + \Pr(\overline{C} \cap \overline{V}) \\
&= \Pr(C)\Pr(V \mid C) + \Pr(\overline{C})\Pr(\overline{V} \mid \overline{C}) \\
&= 0,05 \times 0,90 + 0,95 \times 0,99 \\
&= 0,9855
\end{aligned}
$$

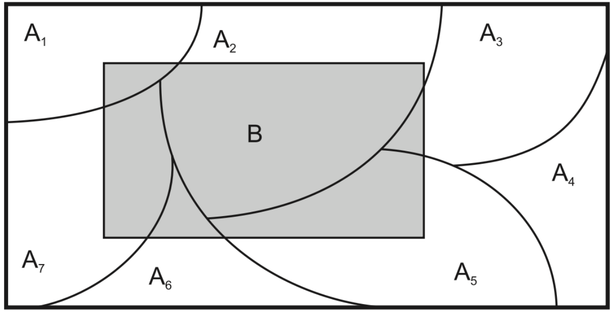


Teorema da Probabilidade Total

Teorema da probabilidade total

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω. Então

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \Pr(B|A_i)$$



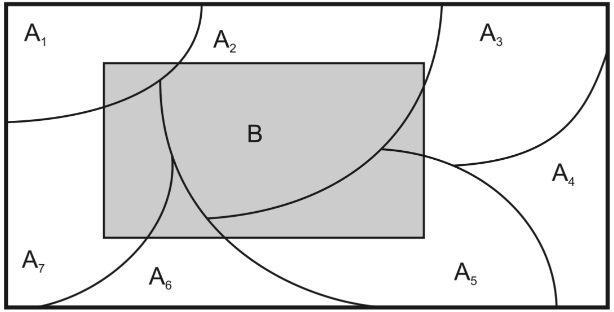
Teorema de Bayes

$$\Pr\left(A_i|B\right) = \frac{\Pr\left(A_i \cap B\right)}{\Pr(B)}$$

Usando a regra da multiplicação e o teorema da probabilidade total, resulta que

$$\Pr\left(A_i|B\right) = \frac{\Pr\left(A_i\right)\Pr\left(A_i|B\right)}{\sum_{j=1}^{n}\Pr\left(A_j\right)\Pr\left(B|A_j\right)}$$

Esse resultado é conhecido como teorema de Bayes.



Exercício – Aula anterior

- Num restaurante, os clientes sempre pedem uma comida (hamburguer ou salada) uma bebida (suco ou refrigerante). 70% dos clientes que pedem suco comem salada. Dos que pedem refrigerante, 30% comem salada. Sabemos ainda que 80% dos clientes pedem suco. Qual é a probabilidade de um cliente pedir salada? Sabendo que um cliente pediu salada, qual é a probabilidade de ele ter pedido suco? É correto afirmar que os clientes que pedem refrigerante neste restaurante são mais inclinados a pedir hamburguer que salada?

Resolução

Parte 1: Probabilidade de um cliente pedir salada

Primeiro, vamos calcular a probabilidade total de um cliente pedir salada, usando a Lei da Probabilidade Total. A probabilidade total de pedir salada é a soma das probabilidades de pedir salada depois de escolher suco ou refrigerante, ponderadas pela probabilidade de escolher suco ou refrigerante.

- Probabilidade de pedir suco, $P(Suco) = 80\%$.
- Probabilidade de pedir refrigerante, $P(Refrigerante) = 100\% - 80\% = 20\%$.
- Probabilidade de pedir salada dado que pediu suco, $P(Salada|Suco) = 70\%$.
- Probabilidade de pedir salada dado que pediu refrigerante, $P(Salada|Refrigerante) = 30\%$.

A probabilidade de pedir salada, $P(Salada)$, é então:

$$P(Salada) = P(Salada|Suco) \cdot P(Suco) + P(Salada|Refrigerante) \cdot P(Refrigerante)$$

Resolução

Parte 2: Probabilidade de ter pedido suco, sabendo que pediu salada

Para esta parte, usaremos a fórmula de Bayes para encontrar a probabilidade de ter pedido suco dado que pediu salada, $P(Suco|Salada)$. A fórmula de Bayes é:

$$P(Suco|Salada) = \frac{P(Salada|Suco) \cdot P(Suco)}{P(Salada)}$$

Parte 3: Clientes que pedem refrigerante são mais inclinados a pedir hambúrguer que salada?

Para responder a esta pergunta, podemos comparar a probabilidade de um cliente que pede refrigerante pedir salada com a probabilidade de pedir hambúrguer. Já sabemos que $P(Salada|Refrigerante) = 30\%$, então a probabilidade de pedir hambúrguer dado que pediu refrigerante é $100\% - 30\% = 70\%$. Isso indica que, sim, os clientes que pedem refrigerante são mais inclinados a pedir hambúrguer que salada.